Interrogation n°4 — Corrigé (sujet A)

NOM : .... Prénom : .... Note :

1) Soit E un ensemble. Que doit vérifier $\mathcal{R}$ pour être une relation d'équivalence ? On donnera pour chaque propriété son nom et sa définition en termes de quantificateurs. De plus, donner la définition de la classe d'équivalence d'un élément $x \in E$.

Cf cours.

2) Soit $f : x \mapsto (1+x)^4$. Quelle est la tangente de f en 0 ? En déduire, pour tout $x \in \mathbb{R}$, une inégalité vérifiée par $f(x)$.

f est dérivable en tant que polynôme, et pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = 4(1+x)^3$. Ainsi, l'équation de sa tangente en 0 est

$$y = f'(0)(x-0) + f(0) = 4x + 1$$

Par ailleurs, on remarque que f' est dérivable et que $f''(x) = 12(1+x)^2 \geq 0$, donc f est convexe. Ainsi, $\mathscr{C}_f$ est situé au-dessus de sa tangente en 0, si bien que :

$$f(x) \geq 4x + 1$$

Interrogation n°4 — Corrigé (sujet B)

NOM : .... Prénom : .... Note :

1) Soit E un ensemble. Que doit vérifier $\mathcal{R}$ pour être une relation d'ordre ? On donnera pour chaque propriété son nom et sa définition en termes de quantificateurs. De plus, donner la définition de “$\mathcal{R}$ définit un ordre total” en termes de quantificateurs.

Cf cours.

2) Appliquer l'inégalité de Jensen à la fonction $f : x \mapsto \sqrt{x}$ définie sur $\mathbb{R}_+^*$. En déduire, pour tous $x_1, \cdots, x_n > 0$, une inégalité vérifiée par $x_1 + \ldots + x_n$.

La fonction f est concave sur $\mathbb{R}_+^*$ car elle est deux fois dérivable et $f''(x) = -\dfrac{1}{2}x^{-3/2} < 0$. Ainsi, par l'inégalité de Jensen,

$$f\left(\frac{1}{n}x_1 + \ldots + \frac{1}{n}x_n\right) \geq \frac{1}{n}f(x_1) + \ldots + \frac{1}{n}f(x_n)$$

donc

$$\sqrt{\frac{1}{n}x_1 + \ldots + \frac{1}{n}x_n} \geq \frac{1}{n}\sqrt{x_1} + \ldots + \frac{1}{n}\sqrt{x_n}$$

$$\frac{1}{n}x_1 + \ldots + \frac{1}{n}x_n \geq \left(\frac{1}{n}\sqrt{x_1} + \ldots + \frac{1}{n}\sqrt{x_n}\right)^2$$